TCVN **TIÊU CHUẨN QUỐC GIA**

TCVN 9603:2013
ISO 5479:1997

Xuất bản lần 1

GIẢI THÍCH CÁC DỮ LIỆU THỐNG KÊ – KIỂM NGHIỆM SAI LỆCH SO VỚI PHÂN BỐ CHUẨN

Statistical interpretation of data –
Tests for departure from the normal distribution

HÀ NỘI - 2013

Mục lục

Lời nói đầu

TCVN 9603:2013 hoàn toàn tương đương với ISO 5479:1997;

TCVN 9603:2013 do Ban kỹ thuật tiêu chuẩn quốc gia TCVN/TC 69 *Ứng dụng các phương pháp thống kê* biên soạn, Tổng cục Tiêu chuẩn Đo lường Chất lượng đề nghị, Bộ Khoa học và Công nghệ công bố.

Lời giới thiệu

Nhiều phương pháp thống kê được khuyến nghị trong tiêu chuẩn này, như các phương pháp mô tả trong ISO 2854 [1], đều dựa trên giả định rằng (các) biến ngẫu nhiên áp dụng với các phương pháp này là độc lập có phân bố chuẩn với một hoặc cả hai tham số chưa biết.

Do đó nảy sinh câu hỏi sau đây. Phân bố thể hiện bởi mẫu đủ gần với phân bố chuẩn để có thể sử dụng một cách tin cậy các phương pháp trong tiêu chuẩn này không?

Không có câu trả lời đơn giản là có hoặc không cho câu hỏi này có hiệu lực trong mọi trường hợp. Vì lý do này, nhiều "kiểm nghiệm tính chuẩn" đã được xây dựng, mỗi phép kiểm nghiệm ít nhiều nhạy với đặc trưng cụ thể của phân bố được xem xét; ví dụ như độ bất đối xứng hay độ nhọn.

Nói chung, phép kiểm nghiệm sử dụng được thiết kế để tương ứng với rủi ro tiên nghiệm xác định trước rằng giả thuyết tính chuẩn bị bác bỏ ngay cả khi nó đúng (sai lầm loại một). Mặt khác, không thể xác định được xác suất giả thuyết này không bị bác bỏ khi nó không đúng (sai lầm loại hai) nếu như đối giả thuyết (nghĩa là ngược với giả thuyết về tính chuẩn) có thể xác định chính xác. Điều này nhìn chung là không thể và, hơn nữa, nó đòi hỏi nỗ lực tính toán. Đối với phép kiểm nghiệm riêng rẽ, rủi ro này đặc biệt lớn nếu cỡ mẫu nhỏ.

Giải thích các dữ liệu thống kê – Kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn

Statistical interpretation of data – Tests for departure from the normal distribution

1 Phạm vi áp dụng

1.1 Tiêu chuẩn này đưa ra hướng dẫn về các phương pháp và phép kiểm nghiệm để sử dụng trong việc xác định có nên bác bỏ giả thuyết về phân bố chuẩn hay không, giả định rằng các quan trắc là độc lập.

1.2 Bất cứ khi nào có nghi ngờ về việc các quan trắc có phân bố chuẩn hay không, việc sử dụng phép kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn sẽ rất hữu ích hay thậm chí là cần thiết. Tuy nhiên, trong trường hợp các phương pháp ổn định (nghĩa là khi các kết quả chỉ thay đổi rất ít khi phân bố xác suất thực tế của quan trắc không phải là phân bố chuẩn), thì phép kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn không hữu ích lắm. Đây là trường hợp, ví dụ, khi trung bình của mẫu ngẫu nhiên đơn của quan trắc được kiểm tra dựa trên giá trị lý thuyết cho trước bằng cách sử dụng phép kiểm nghiệm *t*.

1.3 Không nhất thiết phải sử dụng phép kiểm nghiệm như vậy khi đề cập đến các phương pháp thống kê dựa trên giả thuyết về tính chuẩn. Có khả năng là không nghi ngờ gì về phân bố chuẩn của quan trắc cho dù có các lý do lý thuyết (ví dụ vật lý) khẳng định giả thuyết đó hoặc vì giả thuyết này được coi là có thể chấp nhận được theo thông tin trước đó.

1.4 Các phép kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn lựa chọn trong tiêu chuẩn này chủ yếu dùng cho dữ liệu đầy đủ, không phải dữ liệu phân nhóm. Chúng không thích hợp với dữ liệu bị mất theo dõi.

1.5 Các phép kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn lựa chọn trong tiêu chuẩn này có thể áp dụng cho các giá trị quan trắc hoặc các hàm của chúng, như logarit hoặc căn bậc hai.

1.6 Phép kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn rất kém hiệu quả đối với các cỡ mẫu nhỏ hơn tám. Vì vậy, tiêu chuẩn này giới hạn ở cỡ mẫu từ tám trở lên.

2 Tài liệu viện dẫn

Các tài liệu viện dẫn trong tiêu chuẩn này rất cần thiết cho việc áp dụng tiêu chuẩn. Đối với các tài liệu có ghi năm công bố thì áp dụng bản được nêu. Đối với các tài liệu không ghi năm công bố thì áp dụng phiên bản mới nhất, bao gồm cả các sửa đổi.

TCVN 8244-1 (ISO 3534-1), Thống kê – Từ vựng và ký hiệu – Phần 1: Thuật ngữ chung về xác suất và thống kê

3 Thuật ngữ, định nghĩa và ký hiệu

3.1 Thuật ngữ và định nghĩa

Tiêu chuẩn này áp dụng các thuật ngữ và định nghĩa trong TCVN 8244-1 (ISO 3534-1).

3.2 Ký hiệu

Tiêu chuẩn này sử dụng các ký hiệu dưới đây.

a_k hệ số của phép kiểm nghiệm Shapiro-Wilk

A đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm Epps-Pulley

b_2 độ nhọn thực nghiệm

$\sqrt{b_1}$ độ bất đối xứng thực nghiệm

B đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm Epps-Pulley

E kỳ vọng

G_j đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

h số lượng mẫu liên tiếp

H_0 giả thuyết không

H_1 đối giả thuyết

k số giá trị quan trắc x trong mẫu, sắp xếp theo thứ tự không giảm

m_j mômen trung tâm bậc j của mẫu

n cỡ mẫu

p xác suất kèm với phân vị p của phân bố

P xác suất

P_k xác suất kèm với phân vị $X_{(k)}$

S đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm Shapiro–Wilk

T thống kê kiểm nghiệm

T_{EP} thống kê kiểm nghiệm của phép kiểm nghiệm Epps-Pulley

u_p p-phân vị của phân bố chuẩn chuẩn hóa

v_j đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

W thống kê kiểm nghiệm của phép kiểm nghiệm Shapiro-Wilk

W_j đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

x giá trị của X

X biến ngẫu nhiên

$x_{(j)}$ giá trị thứ j trong mẫu, sắp xếp theo thứ tự không giảm

$x_{(k)}$ giá trị thứ k trong mẫu, sắp xếp theo thứ tự không giảm

$\bar{x}$ trung bình số học

α mức ý nghĩa

β xác suất sai lầm loại hai

β_2 độ nhọn của tổng thể

β_2-3 độ tù của tổng thể

$\sqrt{\beta_1}$ độ bất đối xứng của tổng thể

γ đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

$\gamma_{(n)}$ hệ số của phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

δ đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

$\delta_{(n)}$ hệ số của phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

ε đại lượng phụ trợ cho phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

$\varepsilon_{(n)}$ hệ số của phép kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập

μ kỳ vọng

μ_2 phương sai của tổng thể

μ_3 mômen trung tâm bậc ba của mẫu

μ_4 mômen trung tâm bậc bốn của mẫu

σ độ lệch chuẩn của tổng thể ($=\sqrt{\mu_2}$)

4 Khái quát

4.1 Có nhiều loại phép kiểm nghiệm sai lệch so với tính chuẩn. Trong tiêu chuẩn này xem xét các phương pháp đồ thị, kiểm nghiệm mômen, kiểm nghiệm hồi quy và kiểm nghiệm hàm đặc trưng. Phép kiểm nghiệm khi-bình phương chỉ thích hợp với dữ liệu nhóm nhưng vì việc phân nhóm dẫn đến mất thông tin nên chúng không được xem xét trong tiêu chuẩn này.

4.2 Nếu không có sẵn thông tin bổ sung về mẫu thì khuyến nghị trước tiên vẽ đồ thị xác suất chuẩn; nghĩa là vẽ hàm phân bố tích lũy của các giá trị quan trắc trên biểu đồ xác suất chuẩn gồm một hệ trục tọa độ trong đó hàm phân bố tích lũy của phân bố chuẩn được thể hiện bằng một đường thẳng.

Phương pháp này, được mô tả trong điều 5, cho phép "thấy" ngay phân bố quan trắc có gần với phân bố chuẩn hay không. Với thông tin bổ sung này có thể quyết định tiến hành phép kiểm nghiệm định hướng hay tiến hành kiểm nghiệm hồi quy hoặc kiểm nghiệm hàm đặc trưng, hay không thực hiện kiểm nghiệm nào cả. Ngoài ra, mặc dù cách trình bày bằng đồ thị không được coi là kiểm nghiệm chặt chẽ nhưng thông tin tổng hợp mà nó đưa ra là bổ trợ thiết yếu cho bất kỳ phép kiểm nghiệm độ chệch so với phân bố chuẩn nào. Trong trường hợp bác bỏ giả thuyết không thì bằng cách này thường có khả năng ước đoán loại đối giả thuyết có thể áp dụng được.

4.3 Phép kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn là kiểm nghiệm giả thuyết không rằng mẫu gồm n quan trắc độc lập từ một và cùng phân bố chuẩn. Phép kiểm nghiệm gồm việc tính toán hàm T của các quan trắc được gọi là thống kê kiểm nghiệm. Giả thuyết không của phân bố chuẩn sau đó không bị bác bỏ hoặc bác bỏ tùy thuộc vào việc giá trị của T có nằm trong phạm vi tập hợp giá trị gần giá trị dự kiến tương ứng với phân bố chuẩn hay không.

4.4 **Miền tới hạn** của phép kiểm nghiệm này là tập hợp giá trị T dẫn đến việc bác bỏ giả thuyết không. **Mức ý nghĩa** của kiểm nghiệm là xác suất P thu được giá trị T nằm trong miền tới hạn khi giả thuyết không là đúng. Mức này cho xác suất bác bỏ sai giả thuyết không (sai lầm loại một).

Ranh giới của miền tới hạn (hoặc trong trường hợp kiểm nghiệm hai phía, các ranh giới của miền tới hạn) là (các) giá trị tới hạn của thống kê kiểm nghiệm.

4.5 **Hiệu lực** của phép kiểm nghiệm là xác suất bác bỏ giả thuyết không khi nó không đúng. Hiệu lực cao ứng với xác suất thấp của việc không bác bỏ giả thuyết không một cách sai lầm (sai lầm loại hai).

Cần nhấn mạnh rằng hiệu lực của phép kiểm nghiệm (nghĩa là trong trường hợp nhất định, xác suất giả thuyết không về phân bố chuẩn sẽ bị bác bỏ nếu như điều này sai) sẽ tăng khi số quan trắc tăng. Ví dụ, độ lệch khỏi phân bố chuẩn có thể trở nên rõ ràng khi sử dụng phép kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn trên mẫu lớn có thể không phát hiện được bằng chính phép kiểm nghiệm đó nếu có ít quan trắc hơn.

4.6 Có sự khác biệt giữa hai loại kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn. Khi dạng sai lệch so với phân bố chuẩn được quy định trong đối giả thuyết thì đó là **kiểm nghiệm có hướng**. Tuy nhiên, khi dạng sai lệch so với phân bố chuẩn không được quy định trong đối giả thuyết thì kiểm nghiệm là **kiểm nghiệm vô hướng**.

Trong kiểm nghiệm có hướng, miền tới hạn được xác định sao cho hiệu lực của phép kiểm nghiệm đạt giá trị cực đại. Trong phép kiểm nghiệm vô hướng, cần chia miền tới hạn sao cho miền tới hạn bao gồm các giá trị của thống kê kiểm nghiệm nằm cách xa giá trị dự kiến.

Nếu các giả định thể hiện loại sai lệch so với phân bố chuẩn, nghĩa là khi phân bố được nghiên cứu có độ bất đối xứng hay độ nhọn khác so với của phân bố chuẩn, thì cần áp dụng kiểm nghiệm có hướng vì hiệu lực của nó lớn hơn hiệu lực của kiểm nghiệm vô hướng.

4.7 Chú ý là kiểm nghiệm có hướng nhất thiết là một phía. Trong trường hợp bất đối xứng, ví dụ, nó tập trung vào bất đối xứng dương hoặc bất đối xứng âm. Tuy nhiên, khi cùng xem xét nhiều lựa chọn thì kiểm nghiệm là đa hướng. Đây là trường hợp đặc biệt khi độ bất đối xứng khác không và độ nhọn khác so với phân bố chuẩn được xem xét.

4.8 Các Bảng 8 đến Bảng 14 và Hình 9 cho phép thực hiện các kiểm nghiệm cho hầu hết các mức α thông thường; nghĩa là α = 0,05 và α = 0,01. Mức ý nghĩa phải được quy định trước khi thực hiện kiểm nghiệm. Chú ý rằng kiểm nghiệm có thể dẫn đến bác bỏ giả thuyết không ở mức 0,05 và không bác bỏ chính giả thuyết này ở mức 0,01.

4.9 Trong quá trình tính toán các thống kê kiểm nghiệm, cần sử dụng ít nhất sáu chữ số có nghĩa. Các tổng phụ, kết quả trung gian và đại lượng phụ trợ không được làm tròn đến ít hơn sáu chữ số có nghĩa.

5 Phương pháp đồ thị

5.1 Hàm phân bố tích lũy của các giá trị quan trắc được vẽ trên giấy đồ thị xác suất chuẩn. Trên đồ thị này, một trong các trục (trong tiêu chuẩn này là trục tung) có thang phi tuyến tính theo vùng nằm trong hàm phân bố chuẩn chuẩn hóa và được ghi các giá trị tương ứng của tần suất tích lũy. Trục còn lại có thang tuyến tính cho các giá trị X theo thứ tự. Hàm phân bố tích lũy của biến X khi đó gần như một đường thẳng.

Đôi khi, hai trục này thay đổi cho nhau. Ngoài ra, nếu có sự chuyển đổi chuẩn hóa biến X, thì thang tuyến tính có thể được thay bằng thang logarit, bậc hai, nghịch đảo hoặc thang đo khác.

Hình 1 đưa ra ví dụ về giấy đồ thị xác suất chuẩn. Trên trục tung, giá trị tần suất tích lũy được cho theo phần trăm, trong khi trục hoành có thang đo tuyến tính tùy ý.

Giấy đồ thị xác suất chuẩn để trống được cho trong Phụ lục A.

Nếu đồ thị trong bảng này đưa ra tập hợp các điểm xuất hiện rải rác quanh đường thẳng thì điều này cung cấp hỗ trợ sơ bộ cho giả định rằng mẫu có thể được xem xét một cách hợp lý là xuất phát từ phân bố chuẩn.

Tuy nhiên, nếu có độ lệch hệ thống so với đường thẳng thì đồ thị thường gợi ý loại phân bố cần đưa vào xem xét.

Tầm quan trọng của cách tiếp cận này là nó cung cấp thông tin rõ ràng về loại sai lệch so với phân bố chuẩn.

Nếu đồ thị chỉ ra rằng dữ liệu đến từ phân bố định dạng (ví dụ nếu đồ thị hàm phân bố tích lũy như thể hiện trên Hình 5 hoặc 6) thì việc chuyển đổi dữ liệu có thể dẫn đến phân bố chuẩn.

Nếu đồ thị chỉ ra rằng dữ liệu không đến từ phân bố thuần nhất đơn giản mà từ sự pha trộn hai hoặc nhiều tổng thể con thuần nhất (ví dụ nếu đồ thị hàm phân bố tích lũy như thể hiện trên Hình 7) thì khuyến nghị là cần nhận biết các tổng thể con và tiếp tục phân tích từng tổng thể con một cách riêng rẽ.

Cần lưu ý rằng đồ thị như vậy không thể kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn một cách chặt chẽ. Trong trường hợp mẫu nhỏ, các đường cong rõ rệt có thể xuất hiện đối với phân bố chuẩn, trong khi đối với mẫu lớn, các đường cong không rõ nét có thể chỉ ra phân bố không phải phân bố chuẩn.

5.2 Quy trình vẽ đồ thị bao gồm sắp xếp các giá trị quan trắc ($x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$) theo thứ tự không giảm và sau đó vẽ đồ thị

$$P_k = (k - 3/8)/(n + 1/4) \qquad (1)$$

theo $x_{(k)}$ trên giấy đồ thị xác suất chuẩn.

CHÚ THÍCH 1: Các thay thế cho công thức (1) thường được sử dụng là

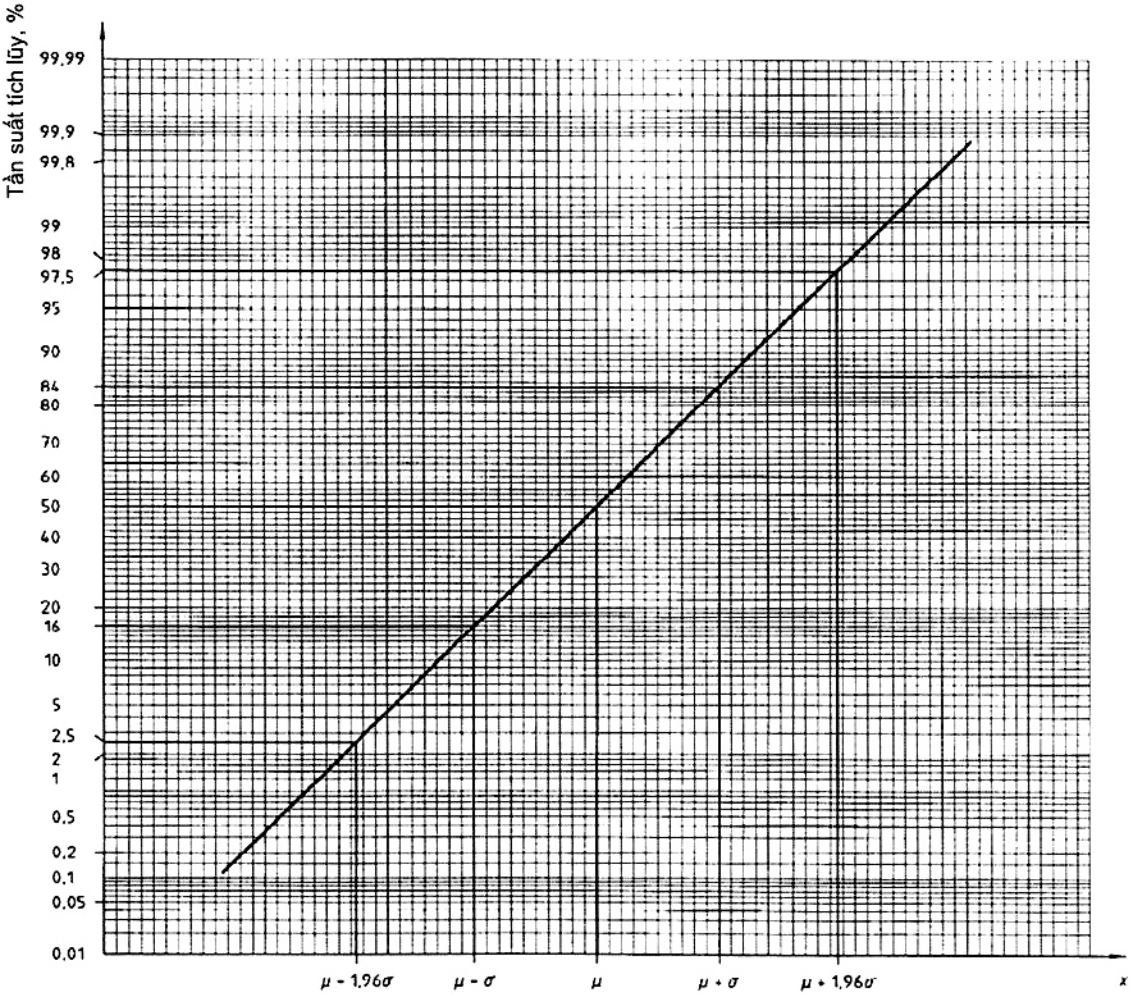
$$P_k = (k - 1/2)/n$$

và

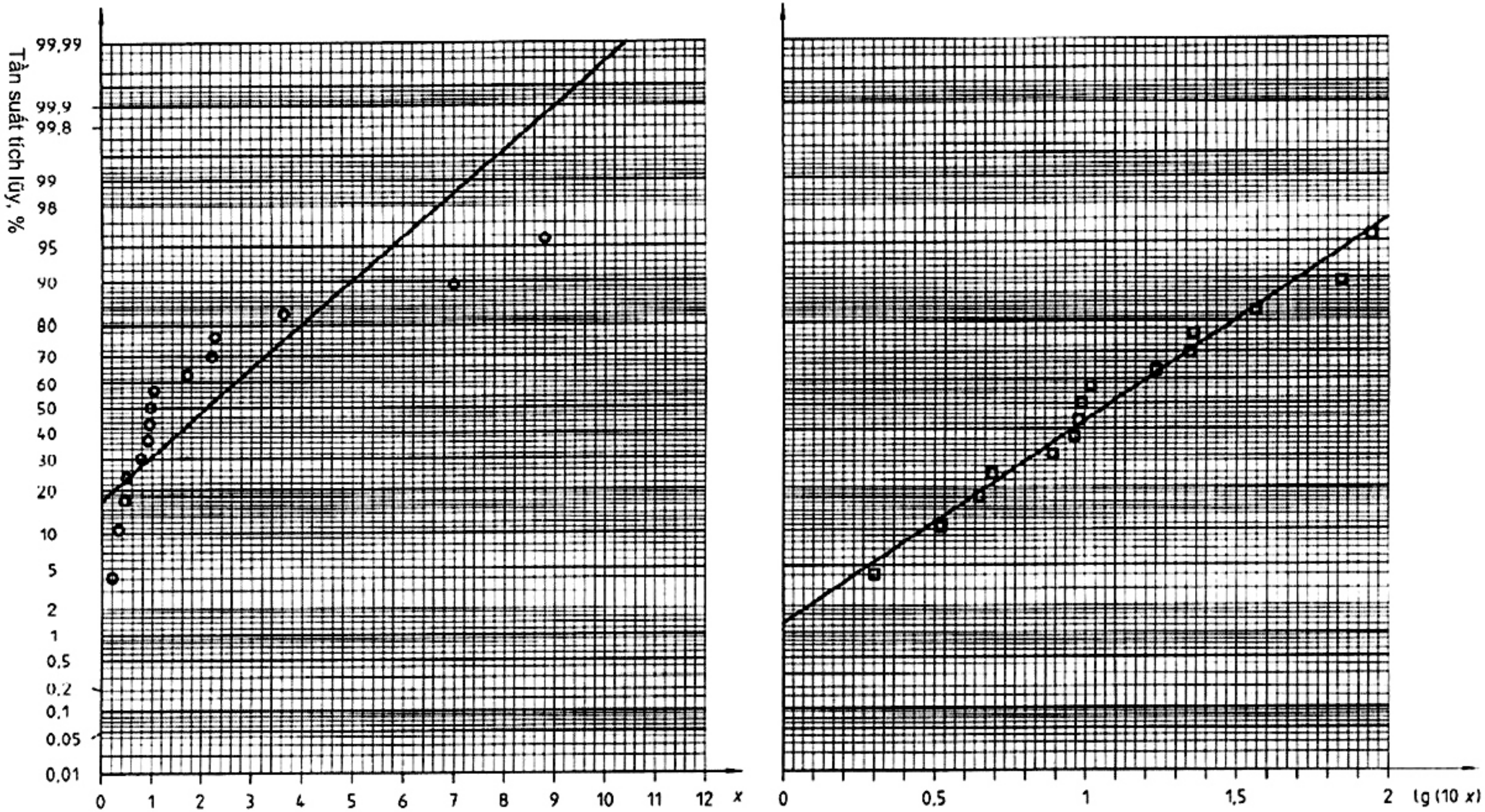
$$P_k = k/(n + 1)$$

Đây là các phép gần đúng kém hơn cho hàm phân bố chuẩn của các thống kê thứ tự dự kiến, $F[E(X_{(k)})]$ và việc sử dụng chúng không được khuyến nghị.

5.3 Ví dụ về cách sử dụng giấy đồ thị xác suất chuẩn được cho trên Hình 2.



Hình 1 – Giấy đồ thị xác suất chuẩn được chú giải



a) b)

Hình 2 – Bảng đồ thị xác suất chuẩn được chú giải

Bảng 1 thể hiện các giá trị $x_{(k)}$ theo thứ tự không giảm kết quả của loạt 15 phép thử chịu uốn luân phiên độc lập.

Bảng 1 – Kết quả, $x_{(k)}$ của loạt 15 phép thử chịu uốn luân phiên và các giá trị tương ứng lg (10 $x_{(k)}$)

k	$P=\dfrac{k-3/8}{n+1/4}$	$x_{(k)}$	$\lg(10x_{(k)})$
1	0,041	0,200	0,301
2	0,107	0,330	0,519
3	0,172	0,445	0,648
4	0,238	0,490	0,690
5	0,303	0,780	0,892
6	0,369	0,920	0,964
7	0,434	0,950	0,978
8	0,500	0,970	0,987
9	0,566	1,040	1,017
10	0,631	1,710	1,233
11	0,697	2,220	1,346
12	0,762	2,275	1,357
13	0,828	3,650	1,562
14	0,893	7,000	1,845
15	0,959	8,800	1,944

CHÚ THÍCH 2: Trong Bảng 1 và các ví dụ dưới đây, đơn vị của các quan trắc được bỏ qua vì chúng không thích hợp cho các phép thử trong tiêu chuẩn này.

Bằng cách kết hợp xác suất

$$P_k = (k - 3/8)/(n + 1/4)$$

với giá trị $x_{(k)}$ nhỏ nhất thứ k, thu được loạt các điểm thể hiện trên Hình 2a). Có thể thấy ngay từ đồ thị là các điểm này không tạo thành đường thẳng. Tuy nhiên, nếu $x_{(k)}$ được thay bằng lg(10 $x_{(k)}$) thì đồ thị mới [Hình 2b)] dẫn đến một loạt các điểm lúc này nằm khá gần với đường thẳng.

Do đó, giả thuyết về phân bố chuẩn của logarit của các quan trắc có vẻ thích hợp.

5.4 Cần chú ý rằng các giá trị quan trắc cực trị có phương sai lớn hơn các giá trị ở giữa. Do đó và vì thang đo tần suất tích lũy mở rộng về phía các cực trị, nên một số ít giá trị nằm ở một trong hai đầu của phân bố tích lũy tách biệt khỏi đường thẳng xác định bởi các giá trị ở giữa không được coi là chỉ thị sai lệch so với phân bố chuẩn.

Cỡ mẫu càng lớn thì các kết luận có thể rút ra từ hình dạng của đồ thị càng đáng tin cậy.

Nếu đồ thị hàm phân bố tích lũy của các giá trị quan trắc trong đó các giá trị lớn có xu hướng nằm phía dưới đường thẳng xác định bởi các giá trị khác thì việc chuyển đổi như

$$y = \log x$$

hay

$$y = \sqrt{x}$$

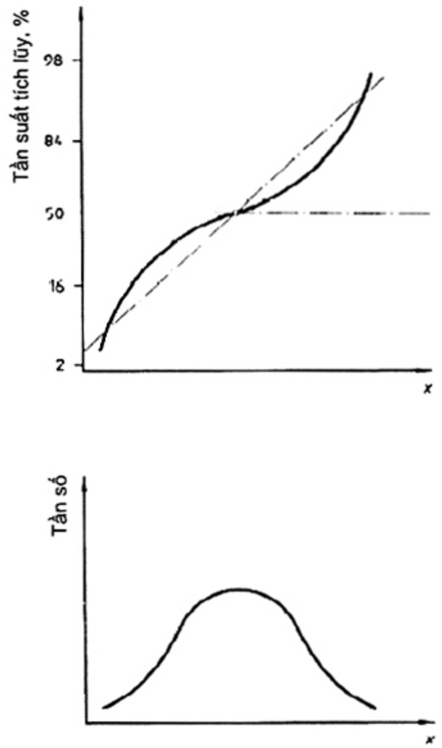
thường sẽ dẫn đến đồ thị phù hợp hơn với đường thẳng [xem Hình 2b) và Hình 5].

Phần trên của các Hình 3 đến 7 cho thấy hàm phân bố tích lũy so sánh với hàm mật độ tương ứng thể hiện trong phần dưới của mỗi hình.

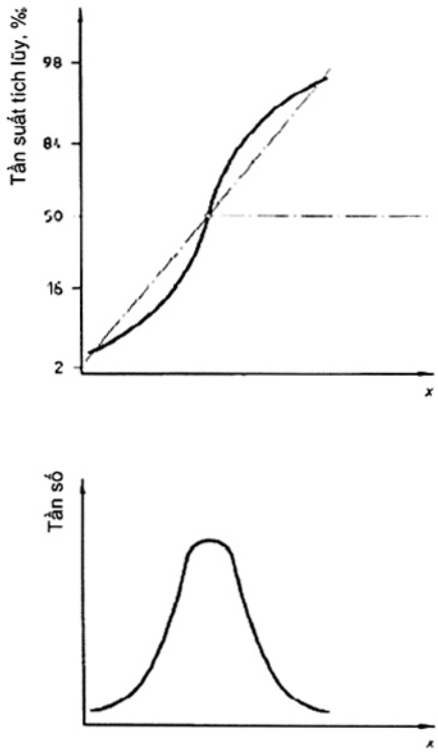
Nếu đồ thị hàm phân bố tích lũy của các giá trị quan trắc như thể hiện trên Hình 3 hoặc 4 thì phân bố tần suất tương ứng là của độ nhọn bè (platykurtic) hoặc của độ nhọn tù (leptokurtic).

Đồ thị hàm phân bố tích lũy thể hiện trên Hình 5 và 6 ứng với hàm mật độ có độ bất đối xứng dương và độ bất đối xứng âm.

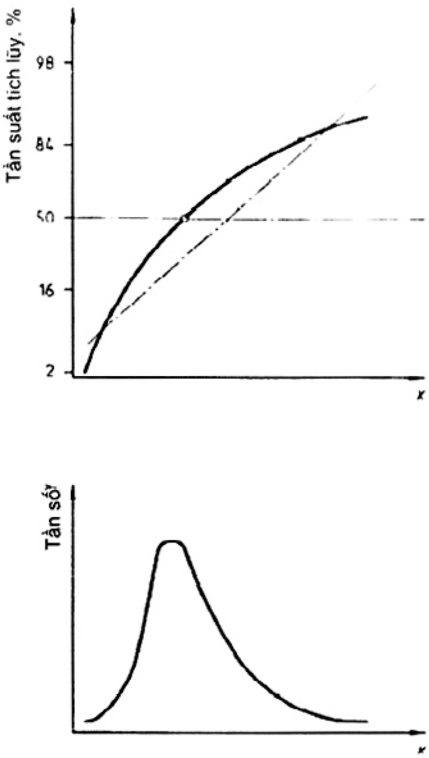
Hình 7 thể hiện hàm phân bố tích lũy và hàm mật độ của sự xếp chồng hai hàm mật độ khác nhau.



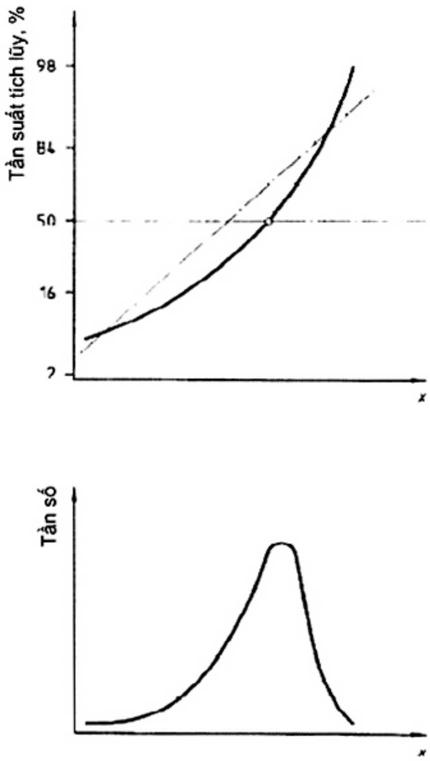
Hình 3 – Hàm mật độ với độ nhọn bè



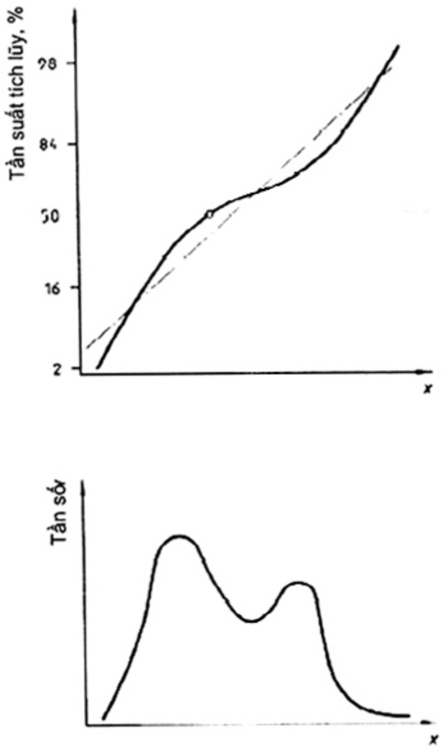
Hình 4 – Hàm mật độ với độ nhọn tù



Hình 5 – Hàm mật độ với độ bất đối xứng dương



Hình 6 – Hàm mật độ với độ bất đối xứng âm



Hình 7 – Xếp chồng của hai hàm mật độ khác nhau

6 Kiểm nghiệm có hướng

6.1 Quy định chung

6.1.1 Kiểm nghiệm có hướng xem xét ở đây chỉ liên quan đến đặc trưng độ nhọn hoặc độ bất đối xứng trong phân bố của các quan trắc. Chúng dựa trên thực tế là trong trường hợp biến ngẫu nhiên chuẩn X có trung bình $\mu = E(X)$, mômen trung tâm bậc ba là

$$\mu_3 = E\,[(X - \mu)^3] = 0 \qquad \text{...(2)}$$

mômen trung tâm chuẩn hóa bậc ba là

$$\sqrt{\beta_1} = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0 \qquad \text{...(3)}$$

và mômen trung tâm chuẩn hóa bậc bốn là

$$\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2 = 3 \qquad \text{...(4)}$$

trong đó

$\mu_2 = E[(X-\mu)^2]$ ...(5)

$\mu_4 = E[(X-\mu)^4]$ ...(6)

$\sqrt{\beta_1}$ là độ bất đối xứng của tổng thể và có thể lớn hơn, bằng hoặc nhỏ hơn không;

β_2 là độ nhọn của tổng thể và luôn dương;

$\beta_2 - 3$ là độ tù của tổng thể;

bất đẳng thức $\beta_2 \geq \left(\sqrt{\beta_1}\right)^2 + 1$ luôn đúng.

6.1.2 Trong kiểm nghiệm độ bất đối xứng, đối giả thuyết là

$H_1: \mu_3 > 0$

hoặc, tương ứng

$\sqrt{\beta_1} > 0$

có nghĩa là bất đối xứng dương (xem Hình 5) hoặc

$H_1: \mu_3 < 0$

hoặc, tương ứng

$\sqrt{\beta_1} < 0$

có nghĩa là bất đối xứng âm (xem Hình 6).

Nói chung, phân bố có bất đối xứng dương có sự phân tán cao hơn giữa các giá trị biến lớn so với giữa các giá trị biến nhỏ; ngược lại là trường hợp bất đối xứng âm.

6.1.3 Trong kiểm nghiệm độ nhọn, đối giả thuyết là

$H_1: \beta_2 > 3$

có nghĩa là độ nhọn tù (hàm mật độ leptokurtic) (xem Hình 4) hoặc

$H_1: \beta_2 < 3$

có nghĩa là độ nhọn bè (hàm mật độ platykurtic) (xem Hình 3).

So với phân bố chuẩn, phân bố có độ nhọn tù có xu hướng có nhiều giá trị biến gần với trung bình và hướng tới hai phía cực trị. Ngược lại là trường hợp độ nhọn bè.

6.1.4 Việc sử dụng kiểm nghiệm có hướng chỉ hợp lý khi có thông tin cụ thể về cách thức phân bố thực khác biệt so với phân bố chuẩn. Thông tin này có thể có được từ tính chất tự nhiên của dữ liệu hoặc loại nhiễu có thể ảnh hưởng tới quá trình tạo dữ liệu.

Ví dụ, thực tế là biến không âm, có trung bình gần với không so với giá trị độ lệch chuẩn, có thể là lý do của bất đối xứng dương của phân bố thực. Tương tự, nhiễu bất kỳ trong quá trình tạo dữ liệu có thể gây ra sự pha trộn các tổng thể chuẩn của cùng một trung bình nhưng khác phương sai dẫn đến phân bố không chuẩn có $\beta_2 > 3$.

6.1.5 Trong mọi trường hợp, việc lựa chọn kiểm nghiệm hướng cần dựa trên các xem xét chung liên quan đến tính chất của quan trắc hoặc quá trình tạo ra chúng chứ không phải dựa trên dạng phân bố cụ thể của các giá trị quan trắc. Trong trường hợp đề cập sau, chỉ kết quả của kiểm nghiệm vô hướng mới được coi là khách quan.

6.1.6 Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là loạt các quan trắc thì

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i \qquad \ldots(7)$$

$$m_j = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^j \qquad \ldots(8)$$

trong đó j = 2, 3, 4

và thống kê kiểm nghiệm độ bất đối xứng và độ nhọn tương ứng là các đại lượng

$$\sqrt{b_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \qquad \ldots(9)$$

và

$$b_2 = \frac{m_4}{m_2^{\,2}} \qquad \ldots(10)$$

6.2 Kiểm nghiệm có hướng sử dụng độ nhọn $\sqrt{b_1}$

Kiểm nghiệm này áp dụng cho $n \geq 8$; tuy nhiên, vì lý do thực tế, Bảng 8 được giới hạn ở $n \leq 5\,000$.

Nếu đối giả thuyết gồm bất đối xứng dương thì chỉ nên tiến hành kiểm nghiệm nếu $m_3 > 0$. Mặt khác, nếu đối giả thuyết gồm bất đối xứng âm thì chỉ nên tiến hành kiểm nghiệm nếu $m_3 < 0$.

Trong hai trường hợp bất đối xứng, kết luận theo hướng bác bỏ giả thuyết không ở mức ý nghĩa α nếu thống kê $\left|\sqrt{b_1}\right|$ vượt quá p–phân vị đối với $p = 1 - \alpha$.

Bảng 8 thể hiện thống kê kiểm nghiệm p–phân vị này đối với $p = 1 - \alpha$ trong đó α = 0,05 và α = 0,01 và cỡ mẫu n = 8(1)10, 12, 15(5)50(10)100(25)200(50)1000(200)2000(500)5000.

VÍ DỤ 1: Ví dụ về việc sử dụng kiểm nghiệm có hướng đối với độ bất đối xứng sử dụng $\sqrt{b_1}$ như sau đây. Bảng 2 đưa ra 50 giá trị đo độc lập độ sâu của dác gỗ trong các tấm gỗ dự kiến dùng làm nút điện báo. Vì độ sâu của dác gỗ là một đặc trưng có giá trị không âm về cơ bản gần với "không" nên có thể giả định bất đối xứng dương. Do đó, cần thực hiện kiểm nghiệm có hướng thích hợp với đối giả thuyết

$$H_1: \sqrt{\beta_1} > 0$$

Vì vậy, từ các giá trị quan trắc liệt kê trong Bảng 2, tính được:

$\bar{x}$ = (1,25 + 1,35 + ... + 5,10)/50 = 2,873

m_2 = [(1,25 − 2,873)^2 + ... + (5,10 − 2,873)^2]/50 = 0,937 921

m_3 = [(1,25 − 2,873)^3 + ... + (5,10 − 2,873)^3]/50 = 0,254 559

Do đó

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = 0,280$$

Với mức ý nghĩa α = 0,05, nghĩa là $p = 1 - \alpha$ = 0,95 và n = 50, giá trị tới hạn của thống kê kiểm nghiệm là 0,53 (xem Bảng 8). Giá trị này lớn hơn $\left|\sqrt{b_1}\right|$ tính được; do đó, giả thuyết không về phân bố chuẩn không bị bác bỏ ở mức ý nghĩa lựa chọn.

Bảng 2 – Độ sâu dác gỗ

1,25	2,05	2,60	3,10	4,00
1,35	2,10	2,60	3,15	4,00
1,40	2,15	2,70	3,15	4,05
1,50	2,15	2,75	3,20	4,05
1,55	2,15	2,75	3,30	4,10
1,60	2,20	2,80	3,45	4,20
1,75	2,25	2,95	3,50	4,45
1,75	2,35	2,95	3,50	4,50
1,85	2,40	3,00	3,80	4,70
1,95	2,55	3,05	3,90	5,10
CHÚ THÍCH: Dãy giá trị sắp xếp theo thứ tự không giảm của 50 quan trắc.				

6.3 Kiểm nghiệm có hướng nhờ sử dụng độ nhọn b_2

Phép kiểm nghiệm này áp dụng cho $n \geq 8$; tuy nhiên, vì lý do thực tế, Bảng 9 giới hạn ở $n \leq 5\,000$.

Trong kiểm nghiệm độ nhọn tù, đối giả thuyết là

$$H_1: \beta_2 > 3$$

Đối giả thuyết phải bị bác bỏ ở mức ý nghĩa xác định trước, ví dụ, α = 0,05 hoặc 0,01 nếu giá trị b_2 tính được vượt quá giá trị tới hạn của thống kê kiểm nghiệm ứng với p phân vị đối với $p = 1 - \alpha$ = 0,95 hoặc $p = 1 - \alpha$ = 0,99 và cỡ mẫu n.

Trong kiểm nghiệm độ nhọn bè, đối giả thuyết là

$$H_1: \beta_2 < 3$$

Đối giả thuyết phải bị bác bỏ ở mức ý nghĩa xác định trước, ví dụ, α = 0,05 hoặc 0,01 nếu giá trị b_2 tính được nhỏ hơn giá trị tới hạn của thống kê kiểm nghiệm ứng với p phân vị đối với $p = \alpha$ = 0,05 hoặc $p = \alpha$ = 0,01 và cỡ mẫu n.

Bảng 9 thể hiện giá trị tới hạn của thống kê kiểm nghiệm b_2 đối với p = 0,01, 0,05, 0,95 và 0,99 và cỡ mẫu n = 8(1)10, 12, 15(5)50(25)150(50)1000(200)2000(500)5000.

VÍ DỤ 2: Ví dụ về việc sử dụng kiểm nghiệm có hướng sử dụng độ nhọn b_2 như sau đây. Bảng 3 đưa ra 50 giá trị đo độc lập, một số trong số đó bị nghi ngờ chịu tác động của lỗi thiết bị đo, lỗi dẫn đến biến động trong sự phân tán của các kết quả đo này.

Do lỗi đề cập ở trên, vì có thể giả định rằng $\beta_2 > 3$ đối với phân bố các quan trắc nên kiểm nghiệm có hướng tương ứng được áp dụng; đối giả thuyết là

$$H_1: \beta_2 > 3$$

Bảng 3 – Loạt 50 quan trắc bị nghi ngờ chịu ảnh hưởng của sự biến động về độ phân tán của các phép đo

9,5	5,1	5,7	16,6	12,9
14,4	5,8	10,8	20,9	13,3
10,2	9,2	22,5	21,5	8,5
4,2	12,9	5,5	9,1	3,3
17,1	6,3	8,6	11,9	1,4
4,4	3,1	7,4	12,9	12,9
4,5	12,9	6,9	26,6	16,3
8,5	11,9	7,9	7,5	15,6
9,9	11,4	3,6	5,4	11,4
7,7	5,9	7,3	32,0	6,0

Vì vậy, từ các giá trị quan trắc liệt kê trong Bảng 3, tính được:

$$\bar{x} = (9,5 + 14,4 + \ldots + 6,0)/50 = 10,542$$

$$m_2 = [(9,5 - 10,542)^2 + \ldots + (6,0 - 10,542)^2]/50 = 37,996\ 4$$

$$m_4 = [(9,5 - 10,542)^4 + \ldots + (6,0 - 10,542)^4]/50 = 7\ 098,04$$

Do đó

$$b_2 = \frac{m_4}{m_2^{\ 2}} = 4{,}916$$

Với mức ý nghĩa α = 0,05, nghĩa là p = 1 − α = 0,95 và cỡ mẫu n = 50, giá trị tới hạn của thống kê kiểm nghiệm là 3,99 (xem Bảng 9). Vì giá trị tính được b_2 = 4,916 lớn hơn giá trị tới hạn này nên giả thuyết không bị bác bỏ thiên về đối giả thuyết ở mức ý nghĩa α = 0,05. Điều này có nghĩa là phân bố của các giá trị quan trắc bị xáo trộn và cho thấy độ nhọn tù.

Ngoài ra, vì giá trị tới hạn ở mức ý nghĩa α = 0,01 là 4,88 nên việc bác bỏ giả thuyết không được xác nhận ở mức này. Vì điều này, sự có mặt của nhiễu thực càng trở nên có nhiều khả năng.

7 Kiểm nghiệm sử dụng đồng thời $\sqrt{b_1}$ và b_2 (kiểm nghiệm đa hướng)

Kiểm nghiệm này áp dụng cho cỡ mẫu 20 ≤ n ≤ 1 000.

7.1 Trong trường hợp này; đối giả thuyết là về phân bố có độ bất đối xứng khác không và/hoặc độ nhọn khác với của phân bố chuẩn, với hướng độ lệch không được quy định:

H_1: $\sqrt{\beta_1} \neq 0$ và/hoặc $\beta_2 \neq 3$

Không thể phân biệt được các kết hợp khác nhau

$\sqrt{\beta_1} \neq 0$ và $\beta_2 = 3$

hoặc

$\sqrt{\beta_1} \neq 0$ và $\beta_2 \neq 3$

hoặc

$\sqrt{\beta_1} \neq 0$ và $\beta_2 \neq 3$

Kiểm nghiệm là đa hướng vì nó dự kiến mang lại sự kết hợp độ bất đối xứng khác "không" ($\sqrt{\beta_1} \neq 0$) và/hoặc độ nhọn $\beta_2 \neq 3$.

Chú ý là, do lựa chọn thống kê, kiểm nghiệm kết hợp này không được coi là kiểm nghiệm vô hướng theo nghĩa chặt chẽ. Vì đối với kiểm nghiệm có hướng, việc sử dụng chỉ được đánh giá bằng các xem xét theo tính chất của quan trắc hoặc quá trình tạo ra chúng.

7.2 Thống kê kiểm nghiệm của phép kiểm nghiệm này tạo bởi cặp giá trị $\left|\sqrt{b_1}\right|$ và b_2 xác định trong công thức (9) và (10) (ở 6.1.6). Theo giả thuyết không về tính chuẩn, trong hệ trục tọa độ ở $\left|\sqrt{b_1}\right|$ và b_2, các vùng quanh điểm (0; 3) có thể được rút ra trong đó chứa điểm ($\left|\sqrt{b_1}\right|$, b_2) với xác suất p. Các đường cong mô tả các vùng này được cho trên Hình 9a) (p = 0,95) và Hình 9b) (p = 0,99) đối với cỡ mẫu n = 20(5)65(10)85,100,120,150(50)300,500,1000.

Ở mức ý nghĩa $\alpha = 1 - p$, miền tới hạn của kiểm nghiệm được hình thành bởi các điểm nằm ngoài đường cong ứng với cỡ mẫu n.

VÍ DỤ 3: Kiểm nghiệm kết hợp sử dụng $\sqrt{\beta_1}$ và b_2 có thể áp dụng cho dữ liệu của ví dụ 2.

Từ các giá trị quan trắc liệt kê trong Bảng 3, tính được:

$$m_3 = [(9{,}5 - 10{,}542)^3 + \dots + (6{,}0 - 10{,}542)^3]/50 = 308{,}106$$

Do đó

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = 1{,}315$$

Điểm ($\left|\sqrt{b_1}\right| = 1{,}315$; $b_2 = 4{,}916$) nằm xa ngoài đường cong ứng với cỡ mẫu $n = 50$ trên Hình 9b) với mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}01$.

Vì vậy, giả thuyết không về phân bố chuẩn bị bác bỏ ở mức ý nghĩa này thiên về đối giả thuyết. Điều này nghĩa là phân bố của đặc trưng đo được xét không phải là phân bố chuẩn.

8 Kiểm nghiệm vô hướng

8.1 Quy định chung

8.1.1 Khi không có thông tin tiên nghiệm cơ bản liên quan đến loại sai lệch so với phân bố chuẩn được giả định thì khuyến nghị sử dụng phép kiểm nghiệm vô hướng.

8.1.2 Hai phép kiểm nghiệm vô hướng được trình bày trong tiêu chuẩn này: kiểm nghiệm Shapiro-Wilk và kiểm nghiệm Epps-Pulley. Có rất ít lựa chọn giữa chúng. Quy tắc ngón tay cái là chọn kiểm nghiệm Shapiro-Wilk khi có sẵn lịch sử trước đó gợi ý là đối giả thuyết phân bố đối xứng gần đúng với độ nhọn bè (ví dụ $\left|\sqrt{\beta_1}\right| < ½$ và $\beta_2 < 3$) hoặc từ phân bố bất đối xứng (ví dụ $\left|\sqrt{\beta_1}\right| > ½$), nếu không thì chọn kiểm nghiệm Epps-Pulley.

8.2 Kiểm nghiệm Shapiro-Wilk

Phép kiểm nghiệm này áp dụng cho $8 \le n \le 50$. Các cỡ mẫu nhỏ, với $n < 8$, không hiệu quả lắm trong việc phát hiện sai lệch so với phân bố chuẩn.

Kiểm nghiệm Shapiro-Wilk dựa trên hồi quy các thống kê thứ tự theo giá trị dự kiến của chúng. Đây là phân tích kiểm nghiệm dạng phương sai đối với mẫu đầy đủ. Thống kê kiểm nghiệm là tỷ số giữa bình phương tổ hợp tuyến tính các thống kê thứ tự mẫu với ước lượng phương sai thông thường.

Kiểm nghiệm này dựa trên các quan trắc theo thứ tự. Nếu, như trong 5.3, loạt n các quan trắc độc lập sắp xếp theo thứ tự không giảm được thiết kế bởi $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ thì đại lượng S được tính:

$$S = \sum a_k \left[x_{(n+1-k)} - x_{(k)}\right] \qquad \text{... (11)}$$

trong đó chỉ số k có giá trị 1 đến n /2 hoặc 1 đến (n – 1)/2 tùy theo n chẵn hay lẻ, và trong đó các hệ số a_k có giá trị đặc biệt đối với cỡ mẫu n. Giá trị của a_k được liệt kê trong Bảng 10 và thống kê kiểm nghiệm là đại lượng

$$W = S^2/(nm_2) \qquad \text{... (12)}$$

Nếu một số quan trắc bằng nhau thì loạt theo thứ tự được liệt kê bằng cách lặp lại các quan trắc bằng nhau tương ứng với số lần xuất hiện của chúng trong loạt ban đầu.

Ở mức ý nghĩa $\alpha = p$, miền tới hạn của kiểm nghiệm được hình thành bởi các giá trị nhỏ hơn p phân vị đối với $p = \alpha$. Bảng 11 thể hiện p phân vị của thống kê kiểm nghiệm W đối với $p = \alpha$ = 0,01 và $p = \alpha$ = 0,05.

VÍ DỤ 4: Ví dụ về việc sử dụng kiểm nghiệm Spapiro-Wilk như sau đây. Bảng 4 thể hiện loạt theo thứ tự gồm 44 giá trị độc lập lượng mưa hàng năm thu được tại trạm khí tượng.

Để thuận lợi cho việc tính toán, các giá trị

$x_{(k)}$, $x_{(n+1-k)}$ và $x_{(n+1-k)} - x_{(k)}$

được trình bày trên cùng một dòng. Từ Bảng 4 giá trị sau đây được tính:

$$\bar{x} = \sum x_{(k)}/44 = 34545 / 44 = 785{,}114$$

$$nm_2 = \sum[x_{(k)} - \bar{x}]^2 = 630872$$

Hệ số a_k được lấy từ Bảng 10 đối với n = 44 và được đưa ra trong Bảng 4, do đó, cho

$$S = \sum a_k \left[x_{(n+1-k)} - x_{(k)}\right] = 0{,}387\,2 \times 554 + 0{,}266\,7 \times 500 + \ldots + 0{,}004\,2 \times 9 = 787{,}263$$

Do đó

$$W = \frac{S^2}{nm_2} = (787{,}262\,7)^2/630\,872{,}43 = 0{,}982$$

Bảng 11 thể hiện p phân vị đối với n = 44 và $p = \alpha$ = 0,05 bằng 0,944. Vì giá trị này nhỏ hơn giá trị của W nên giả thuyết không không bị bác bỏ ở mức ý nghĩa 0,05.

Bảng 4 – Lượng mưa hàng năm thu được ở trạm khí tượng

k	$x_{(k)}$	$x_{(n+1-k)}$	$x_{(n+1-k)} - x_{(k)}$	a_k
1	520	1074	554	0,387 2
2	556	1056	500	0,266 7
3	561	963	402	0,232 3
4	616	952	336	0,207 2
5	635	926	291	0,186 8
6	669	922	253	0,169 5
7	686	904	218	0,154 2
8	692	900	208	0,140 5
9	704	889	185	0,127 8
10	707	879	172	0,116 0
11	711	873	162	0,104 9
12	713	862	149	0,094 3
13	714	851	137	0,084 2
14	719	837	118	0,074 5
15	727	834	107	0,065 1
16	735	826	91	0,056 0
17	740	822	82	0,047 1
18	744	821	77	0,038 3
19	745	794	49	0,029 6
20	750	791	41	0,021 1
21	776	786	10	0,012 6
22	777	786	9	0,004 2

CHÚ THÍCH: Loạt theo thứ tự gồm 44 quan trắc và các giá trị a_k tương ứng.

8.3 Kiểm nghiệm Epps-Pulley

Xem tài liệu tham khảo [2] đến [5]. Phép kiểm nghiệm này áp dụng đối với $n \geq 8$. Các cỡ mẫu nhỏ, với $n < 8$, không hiệu quả lắm trong việc phát hiện sai lệch so với phân bố chuẩn.

Kiểm nghiệm Epps-Pulley là kiểm nghiệm vô hướng có hiệu lực cao hơn dựa trên nhiều đối giả thuyết. Kiểm nghiệm này sử dụng tích phân có trọng số của mô đun bình phương hiệu giữa các hàm đặc trưng của mẫu và của phân bố chuẩn.

Từ n quan trắc x_j (j = 1, 2, ..., n) các đại lượng sau đây được tính:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \qquad \text{... (13)}$$

và

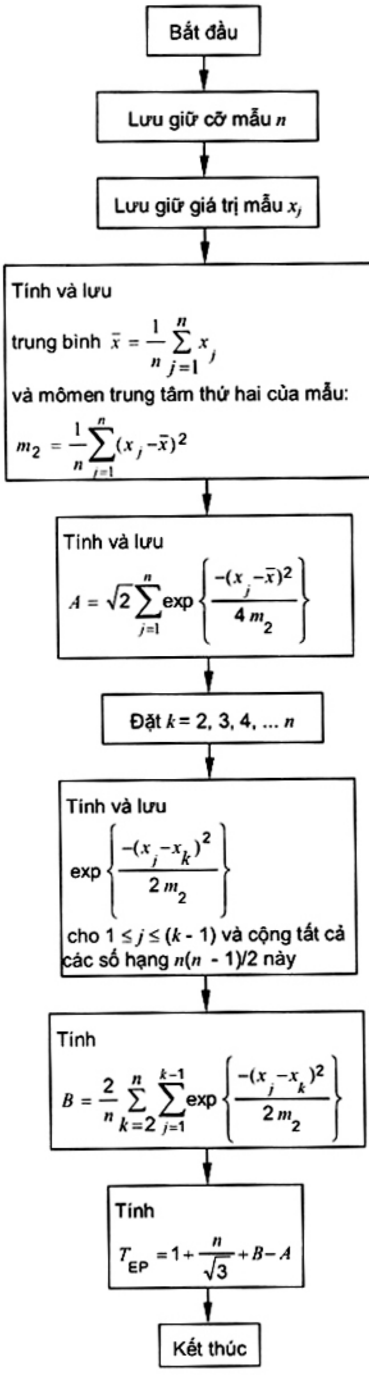
$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 \qquad \text{... (14)}$$

Thống kê kiểm nghiệm là

$$T_{\mathrm{EP}} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\exp\left\{\frac{-(x_j - x_k)^2}{2m_2}\right\} - \sqrt{2}\sum_{j=1}^{n}\exp\left\{\frac{-(x_j - \bar{x})^2}{4m_2}\right\} \qquad \text{...(15)}$$

Thứ tự các giá trị quan trắc là tùy chọn nhưng đặc biệt chú ý đến thực tế là thứ tự được chọn phải duy trì không đổi trong toàn bộ tính toán.

Lưu đồ chương trình thể hiện việc tính toán thống kê kiểm nghiệm T_{EP} được cho trên Hình 8.



Hình 8 – Lưu đồ tính toán thống kê kiểm nghiệm T_{EP} của phép kiểm nghiệm Epps-Pulley

Giả thuyết không bị bác bỏ nếu giá trị tính được của thống kê kiểm nghiệm T_{EP} vượt quá p phân vị đối với mức ý nghĩa α và cỡ mẫu n. Các p phân vị của thống kê kiểm nghiệm T_{EP} đối với $p = 1 - \alpha = 0{,}90$; 0,95; 0,975 và 0,99 được liệt kê trong Bảng 12.

VÍ DỤ 5: Ví dụ về việc sử dụng kiểm nghiệm Epps-Pulley như dưới đây. Bảng 5 thể hiện loạt 25 giá trị x_j độ bền kéo đứt của sợi tơ nhân tạo, đo được trong các điều kiện tiêu chuẩn theo đơn vị tùy ý. Ngoài ra, giá trị chuyển đổi $z_j = \lg(204 - x_j)$ được đưa ra, phân tán quanh đường thẳng trên giấy đồ thị xác suất chuẩn.

Bảng 5 – Độ bền kéo đứt của sợi tơ nhân tạo

x_j đo được	z_j chuyển đổi	x_j đo được	z_j chuyển đổi
147	1,756	99	2,021
186	1,255	156	1,681
141	1,799	176	1,447
183	1,322	160	1,643
190	1,146	174	1,477
123	1,908	153	1,708
155	1,690	162	1,623
164	1,602	167	1,568
183	1,322	179	1,398
150	1,732	78	2,100
134	1,845	173	1,491
170	1,531	168	1,556
144	1,778		

Từ Bảng 5 tìm được

$$T_{EP(x)} = 0{,}612$$

sử dụng chương trình máy tính ngắn và đơn giản. Đối với $n = 25$, bằng cách nội suy trong Bảng 12 tìm được p phân vị đối với $p = 1 - \alpha = 0{,}99$ bằng 0,567. Giá trị $T_{EP(x)}$ tính được vượt quá giá trị tới hạn này. Vì vậy giả thuyết không bị bác bỏ ở mức ý nghĩa 0,01 đối với các giá trị x_j.

Ngoài ra, từ Bảng 5 tìm được

$$T_{EP(z)} = 0{,}006$$

sử dụng cùng một chương trình máy tính. Vì giá trị này nhỏ hơn giá trị tới hạn đối với $n = 25$ nội suy từ Bảng 12 nên không bác bỏ giả thuyết không đối với các giá trị z_j.

Ví dụ này minh họa thực tế đã được biết rõ là độ bền kéo đứt của sợi tơ nhân tạo được phân bố theo phân bố chuẩn logarit.

VÍ DỤ 6: Ví dụ sau đây minh họa chi tiết cách tính thống kê kiểm nghiệm T_{EP} theo công thức (15).

Cột thứ hai của Bảng 6 thể hiện $n = 10$ giá trị x_j sử dụng để thực hiện kiểm nghiệm Epps-Pulley. Theo công thức (13) và (14) , $\bar{x} = 10{,}4$ và $m_2 = 11{,}858\ 0$ được tính.

Tổng kép trong số hạng thứ ba của công thức (15) là chuỗi hữu hạn ($n - 1$) chuỗi con, chuỗi con đầu tiên trong số đó có một số hạng và chuỗi con cuối cùng có ($n - 1$) số hạng.

Đối với chuỗi con đầu tiên, chỉ số cố định là k = 2 và số hạng duy nhất của chuỗi này là

$$\exp\left\{\frac{-(x_1-x_2)^2}{2m_2}\right\}$$

thu được đối với j = 1. Trong chuỗi con thứ hai, chỉ số cố định là k = 3; chuỗi này có hai số hạng

$$\exp\left\{\frac{-(x_1-x_3)^2}{2m_2}\right\} \text{ và } \exp\left\{\frac{-(x_2-x_3)^2}{2m_2}\right\}$$

thu được đối với j = 1 và j = 2. Trong chuỗi con cuối cùng, chỉ số cố định là k = 10 và chín số hạng là

$$\exp\left\{\frac{-(x_1-x_{10})^2}{2m_2}\right\}, \ldots, \exp\left\{\frac{-(x_9-x_{10})^2}{2m_2}\right\}$$

thu được đối với j = 1, 2, 3, ..., 9.

Các số hạng đối với chuỗi con n – 1 = 9 được liệt kê trong cột thứ ba đến mười một của Bảng 6.

Cột thứ mười hai thể hiện n = 10 số hạng đối với tổng trong số hạng thứ tư của công thức (15).

Bảng 6 – Độ bền kéo đứt của sợi tơ nhân tạo - Tính thống kê kiểm nghiệm T_{EP}

		$\exp\left\{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2m_2}\right\}$									$\exp\left\{\frac{-(x_j-\bar{x})^2}{4m_2}\right\}$
j	x_j	k = 2 j = 1	k = 3 j = 1,2	k = 4 j = 1..3	k = 5 j = 1..4	k = 6 j = 1..5	k = 7 j = 1..6	k = 8 j = 1..7	k = 9 j = 1..8	k = 10 j = 1..9	j = 1..10
1	4,9	0,9996	0,8977	0,2192	0,2083	0,1684	0,0769	0,0587	0,0304	0,0205	0,5285
2	5,0	–	0,9095	0,2304	0,2192	0,1778	0,0821	0,0629	0,0329	0,0222	0,5407
3	6,5	–	–	0,4421	0,4258	0,3633	0,1977	0,1593	0,0933	0,0673	0,7257
4	10,9	–	–	–	0,9996	0,9895	0,8723	0,8154	0,6668	0,5790	0,9947
5	11,0	–	–	–	–	0,9933	0,8853	0,8303	0,6842	0,5966	0,9924
6	11,4	–	–	–	–	–	0,9312	0,8853	0,7520	0,6668	0,9791
7	12,7	–	–	–	–	–	–	0,9933	0,9312	0,8723	0,8945
8	13,1	–	–	–	–	–	–	–	0,9664	0,9207	0,8575
9	14,0	–	–	–	–	–	–	–	–	0,9895	0,7609
10	14,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,7016
Tổng	104,0	0,9996	1,8072	0,8916	1,8528	2,6923	3,0455	3,8052	4,1573	4,7350	7,9757
Tổng cộng		23,9865									

Mỗi trong số mười cột cuối của Bảng 6, tổng của chúng đều được tính và nhập ở cuối cột.

Tất cả 45 số hạng thuộc về tổng trong số hạng thứ ba của công thức (15) được cộng lại thành giá trị tổng cộng

$$\sum_{k=2}^{10}\sum_{j=1}^{k-1}\exp\left\{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2m_2}\right\} = 23,9865$$

Cuối cùng công thức (15) được tính bằng

$$T_{EP} = 1 + \frac{10}{\sqrt{3}} + \left(\frac{2}{10} \times 23,9865\right) - \left(\sqrt{2} \times 7,9757\right) = 0,2914$$

Đối với n = 10 Bảng 12 cho thấy rằng p phân vị đối với $p = 1 - \alpha$ = 0,95 bằng 0,357. Giá trị T_{EP} = 0,2914 không vượt quá giá trị tới hạn này. Vì vậy không bác bỏ giả thuyết không ở mức ý nghĩa 0,05 đối với ví dụ này.

9 Kiểm nghiệm sử dụng đồng thời nhiều mẫu độc lập

Kiểm nghiệm này áp dụng cho nhiều mẫu, mỗi mẫu cỡ n với $n \geq 8$, tuy nhiên, vì lý do thực tế, Bảng 13 giới hạn ở $n \leq 50$. Cơ sở giả định là các mẫu độc lập được lấy từ cùng một tổng thể.

Trong nhiều trường hợp, cần kiểm nghiệm sai lệch so với phân bố chuẩn bằng cách sử dụng nhiều mẫu độc lập vì từng mẫu độc lập quá nhỏ để phát hiện ngay cả sai lệch đáng kể so với phân bố chuẩn. Trong trường hợp này, kiểm nghiệm Shapiro-Wilk được áp dụng.

Đối với h mẫu liên tiếp lấy từ cùng một tổng thể mỗi mẫu có cỡ n, các giá trị W_j (j = 1, 2, ..., h) được tính theo công thức (12). Đối với kiểm nghiệm kết hợp các giá trị tương ứng G_j được tính từ quan hệ sau đây:

$$G_j = \gamma(n) + \delta(n)\, v_j \qquad \text{... (16)}$$

trong đó

$$v_j = \ln\left\{\frac{W_j - \varepsilon(n)}{1 - W_j}\right\} \qquad \text{... (17)}$$

Các hệ số $\gamma(n)$, $\delta(n)$ và $\varepsilon(n)$ dùng để chuyển đổi W_j thành biến G_j được lấy từ Bảng 13.

Trong trường hợp phân bố đang xét là chuẩn thì biến G_j gần như tuân theo phân bố chuẩn chuẩn hóa. Giá trị trung bình của biến G_j là

$$\overline{G} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{h} G_j \qquad \text{... (18)}$$

và thống kê kiểm nghiệm là $\sqrt{h} \times \overline{G}$.

Giả thuyết không bị bác bỏ ở mức ý nghĩa α nếu

$$\sqrt{h} \times \overline{G} < -u_{1-\alpha} \qquad \text{... (19)}$$

trong đó $u_p = u_{1-\alpha}$ là p phân vị của phân bố chuẩn chuẩn hóa.

VÍ DỤ 7: Ví dụ về việc sử dụng kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập như dưới đây. h = 22 mẫu ngẫu nhiên, mỗi mẫu cỡ n = 20 được lấy từ cùng một tổng thể và đặc trưng X của 20 cá thể này được đo. Đặc trưng này không được giả định là có phân bố chuẩn. Đối với mỗi trong số các mẫu này, các giá trị tương ứng W_j (j =

1, 2, ..., 22) được tính theo công thức (12). Trong Bảng 7 liệt kê 22 giá trị W_j. Từ Bảng 13, các hệ số sau đây được lấy ra:

$\gamma(20) = -5{,}153$; $\delta(20) = 1{,}802$; $\varepsilon(20) = 0{,}2359$

Sử dụng các con số này, 22 giá trị tương ứng của G_j được tính theo công thức (16) và (17), đồng thời cũng được liệt kê trong Bảng 7.

Theo Bảng 11 giá trị tới hạn của thống kê W là 0,868 đối với n = 20 ở mức ý nghĩa α = 0,01. Từ Bảng 14, giá trị tới hạn cho $\sqrt{h} \times \overline{G}$ là

$$-u_{1-\alpha} = -u_{0,99} = -2{,}326$$

ở mức ý nghĩa α = 0,01.

Bảng 7 – Giá trị của W_j và G_j đối với 22 mẫu cỡ n = 20 được lấy từ cùng một tổng thể

Mẫu số j	W_j	G_j
1	0,9543	−0,189
2	0,9645	+0,292
3	0,9148	−1,413
4	0,8864	−2,008
5	0,9573	−0,059
6	0,9158	−1,389
7	0,9462	−0,503
8	0,9277	−1,083
9	0,9639	+0,260
10	0,9363	−0,833
11	0,9067	−1,598
12	0,9218	−1,240
13	0,9551	−0,155
14	0,9338	−0,909
15	0,9584	−0,009
16	0,9088	−1,552
17	0,9028	−1,683
18	0,8947	−1,849
19	0,9488	−0,407
20	0,9445	−0,563
21	0,9471	−0,470
22	0,9451	−0,542
Tổng		−17,902

Nếu bất kỳ trong số 22 mẫu này được xử lý riêng thì không mẫu nào có thể cho thấy sai lệch so với phân bố chuẩn ở mức ý nghĩa α = 0,01 vì không một giá trị nào của W_j nhỏ hơn giá trị tới hạn 0,868 và không giá trị nào của G_j nhỏ hơn giá trị tới hạn − 2,326.

Tuy nhiên, đánh giá kết hợp tất cả 22 mẫu được

$\bar{G}$ = − 17,902 / 22 = − 0,814

và

$\sqrt{h} \times \bar{G}$ = - 3,82

Giá trị này được so với giá trị tới hạn $-u_p$ = − 2,326 ở mức ý nghĩa α = 0,01 đã cho. Vì giá trị tính được − 3,82 nằm dưới giá trị tới hạn này nên giả thuyết không bị bác bỏ ở mức ý nghĩa α = 0,01.

10 Bảng thống kê

Bảng 8 − Kiểm nghiệm độ bất đối xứng, $\sqrt{b_1}$

(p phân vị của $\left|\sqrt{b_1}\right|$ đối với p = 1 − α = 0,95 và 0,99)

n	p		n	p	
	0,95	0,99		0,95	0,99
8	0,99	1,42	400	0,20	0,28
9	0,97	1,41	450	0,19	0,27
10	0,95	1,39	500	0,18	0,26
12	0,91	1,34	550	0,17	0,24
15	0,85	1,26	600	0,16	0,23
20	0,77	1,15	650	0,16	0,22
25	0,71	1,06	700	0,15	0,22
30	0,66	0,98	750	0,15	0,21
35	0,62	0,92	800	0,14	0,20
40	0,59	0,87	850	0,14	0,20
45	0,56	0,82	900	0,13	0,19
50	0,53	0,79	950	0,13	0,18
60	0,49	0,72	1000	0,13	0,18
70	0,46	0,67	1200	0,12	0,16
80	0,43	0,63	1400	0,11	0,15
90	0,41	0,60	1600	0,10	0,14
100	0,39	0,57	1800	0,10	0,13
125	0,35	0,51	2000	0,09	0,13
150	0,32	0,46	2500	0,08	0,11
175	0,30	0,43	3000	0,07	0,10
200	0,28	0,40	3500	0,07	0,10
250	0,25	0,36	4000	0,06	0,09
300	0,23	0,33	4500	0,06	0,08
350	0,21	0,30	5000	0,06	0,08

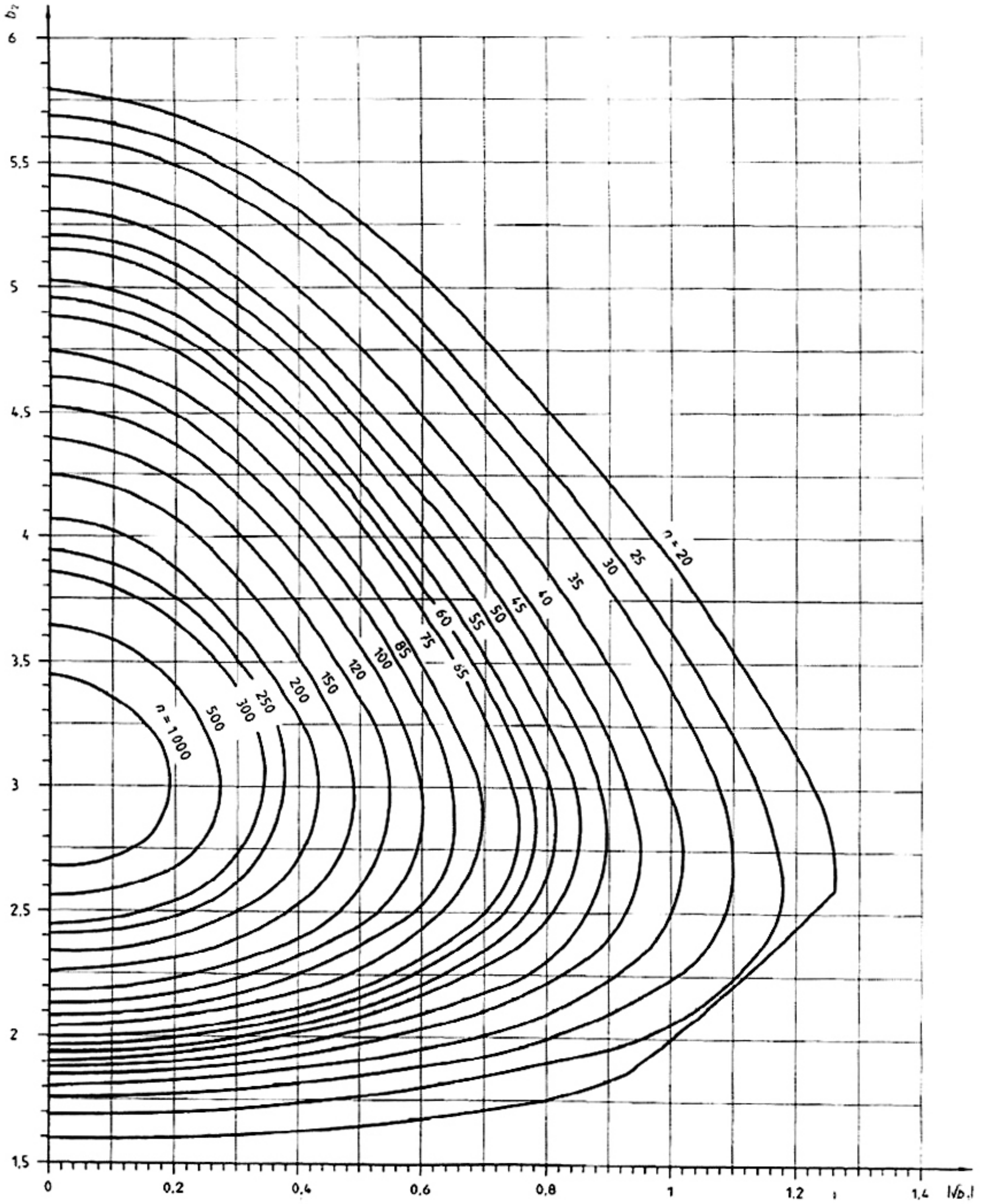
CHÚ THÍCH: Lấy từ tài liệu tham khảo [6] và [7].

Bảng 9 – Kiểm nghiệm độ nhọn, b_2 (p phân vị của b_2

đối với $p = \alpha$ = 0,01 và 0,05 và $p = 1 - \alpha$ = 0,95 và 0,99

n	p		p	
	0,01	0,05	0,95	0,99
8	1,31	1,46	3,70	4,53
9	1,35	1,53	3,86	4,82
10	1,39	1,56	3,95	5,00
12	1,46	1,64	4,05	5,20
15	1,55	1,72	4,13	5,30
20	1,65	1,82	4,17	5,36
25	1,72	1,91	4,16	5,30
30	1,79	1,98	4,11	5,21
35	1,84	2,03	4,10	5,13
40	1,89	2,07	4,06	5,04
45	1,93	2,11	4,00	4,94
50	1,95	2,15	3,99	4,88
75	2,08	2,27	3,87	4,59
100	2,18	2,35	3,77	4,39
125	2,24	2,40	3,71	4,24
150	2,29	2,45	3,65	4,13
200	2,37	2,51	3,57	3,98
250	2,42	2,55	3,52	3,87
300	2,46	2,59	3,47	3,79
350	2,50	2,62	3,44	3,72
400	2,52	2,64	3,41	3,67
450	2,55	2,66	3,39	3,63
500	2,57	2,67	3,37	3,60
550	2,58	2,69	3,35	3,57
600	2,60	2,70	3,34	3,54
650	2,61	2,71	3,33	3,52
700	2,62	2,72	3,31	3,50
750	2,64	2,73	3,30	3,48
800	2,65	2,74	3,29	3,46
850	2,66	2,74	3,28	3,45
900	2,66	2,75	3,28	3,43
950	2,67	2,76	3,27	3,42
1000	2,68	2,76	3,26	3,41
1200	2,71	2,78	3,24	3,37
1400	2,72	2,80	3,22	3,34
1600	2,74	2,81	3,21	3,32
1800	2,76	2,82	3,20	3,30
2000	2,77	2,83	3,18	3,28
2500	2,79	2,85	3,16	3,25
3000	2,81	2,86	3,15	3,22
3500	2,82	2,87	3,14	3,21
4000	2,83	2,88	3,13	3,19
4500	2,84	2,88	3,12	3,18
5000	2,85	2,89	3,12	3,17

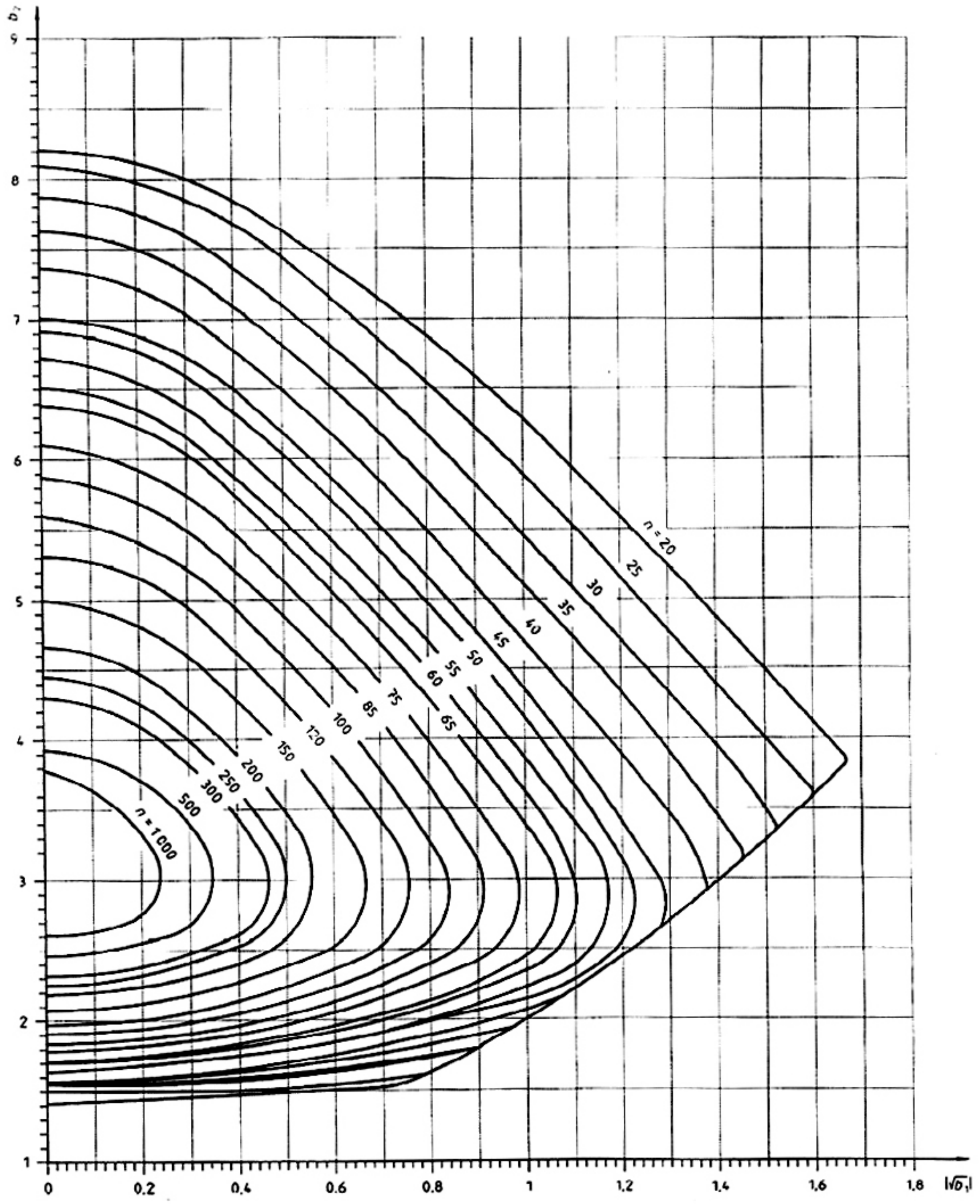
CHÚ THÍCH: Lấy từ tài liệu tham khảo [7] và [8].



a) Các đường cong mô tả miền tới hạn ở mức ý nghĩa α = 0,05

CHÚ THÍCH: Lấy từ Tài liệu tham khảo [9].

Hình 9 – Kiểm nghiệm kết hợp sử dụng $\left|\sqrt{b_1}\right|$ và b_2 (kiểm nghiệm đa hướng)



b) Các đường cong mô tả miền tới hạn ở mức ý nghĩa α = 0,01

CHÚ THÍCH: Lấy từ Tài liệu tham khảo [9].

Hình 9 – Kiểm nghiệm kết hợp sử dụng $\left|\sqrt{b_1}\right|$ và b_2 (kiểm nghiệm đa hướng)

Bảng 10 – Hệ số a_k kiểm nghiệm Shapiro–Wilk dùng cho tính toán thống kê kiểm nghiệm W

k	n									
								8	9	10
1	—	—	—	—	—	—	—	0,605 2	0,588 8	0,573 9
2	—	—	—	—	—	—	—	0,316 4	0,324 4	0,329 1
3	—	—	—	—	—	—	—	0,174 3	0,197 6	0,214 1
4	—	—	—	—	—	—	—	0,056 1	0,094 7	0,122 4
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,039 9
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,560 1	0,547 5	0,535 9	0,525 1	0,515 0	0,505 6	0,496 8	0,488 6	0,480 8	0,473 4
2	0,331 5	0,332 5	0,332 5	0,331 8	0,330 6	0,329 0	0,327 3	0,325 3	0,323 2	0,321 1
3	0,226 0	0,234 7	0,241 2	0,246 0	0,249 5	0,252 1	0,254 0	0,255 3	0,256 1	0,256 5
4	0,142 9	0,158 6	0,170 7	0,180 2	0,187 8	0,193 9	0,198 8	0,202 7	0,205 9	0,208 5
5	0,069 5	0,092 2	0,109 9	0,124 0	0,135 3	0,144 7	0,152 4	0,158 7	0,164 1	0,168 6
6	—	0,030 3	0,053 9	0,072 7	0,098 0	0,100 5	0,110 9	0,119 7	0,127 1	0,133 4
7	—	—	—	0,024 0	0,043 3	0,059 3	0,072 5	0,083 7	0,093 2	0,101 3
8	—	—	—	—	—	0,019 6	0,035 9	0,049 6	0,061 2	0,071 1
9	—	—	—	—	—	—	—	0,016 3	0,030 3	0,042 2
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,014 0
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,464 3	0,459 0	0,454 2	0,449 3	0,445 0	0,440 7	0,436 6	0,432 8	0,429 1	0,425 4
2	0,318 5	0,315 6	0,312 6	0,309 8	0,306 9	0,304 3	0,301 8	0,299 2	0,296 8	0,294 4
3	0,257 8	0,257 1	0,256 3	0,255 4	0,254 3	0,253 3	0,252 2	0,251 0	0,249 9	0,248 7
4	0,211 9	0,213 1	0,213 9	0,214 5	0,214 8	0,215 1	0,215 2	0,215 1	0,215 0	0,214 8
5	0,173 6	0,176 4	0,178 7	0,180 7	0,182 2	0,183 6	0,184 8	0,185 7	0,186 4	0,187 0
6	0,139 9	0,144 3	0,148 0	0,151 2	0,153 9	0,156 3	0,158 4	0,160 1	0,161 6	0,163 0
7	0,109 2	0,115 0	0,120 1	0,124 5	0,128 3	0,131 6	0,134 6	0,137 2	0,139 5	0,141 5
8	0,080 4	0,087 8	0,094 1	0,099 7	0,104 6	0,108 9	0,112 8	0,116 2	0,119 2	0,121 9
9	0,053 0	0,061 8	0,069 6	0,076 4	0,082 3	0,087 6	0,092 3	0,096 5	0,100 2	0,103 6
10	0,026 3	0,036 8	0,045 9	0,053 9	0,061 0	0,067 2	0,072 8	0,077 8	0,082 2	0,086 2
11	—	0,012 2	0,022 8	0,032 1	0,040 3	0,047 6	0,054 0	0,059 8	0,065 0	0,069 7
12	—	—	—	0,010 7	0,020 0	0,028 4	0,035 8	0,042 4	0,048 3	0,053 7
13	—	—	—	—	—	0,009 4	0,017 8	0,025 3	0,032 0	0,038 1
14	—	—	—	—	—	—	—	0,008 4	0,015 9	0,022 7
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,007 6
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0,422 0	0,418 8	0,415 6	0,412 7	0,409 8	0,406 8	0,404 0	0,401 5	0,398 9	0,396 4
2	0,292 1	0,289 8	0,287 6	0,285 4	0,283 4	0,281 3	0,279 4	0,277 4	0,275 5	0,273 7
3	0,247 5	0,246 3	0,245 1	0,243 9	0,242 7	0,241 5	0,240 3	0,239 1	0,238 0	0,236 8
4	0,214 5	0,214 1	0,213 7	0,213 2	0,212 7	0,212 1	0,211 6	0,211 0	0,210 4	0,209 8
5	0,187 4	0,187 8	0,188 0	0,188 2	0,188 3	0,188 3	0,188 3	0,188 1	0,188 0	0,187 8
6	0,164 1	0,165 1	0,166 0	0,166 7	0,167 3	0,167 8	0,168 3	0,168 6	0,168 9	0,169 1
7	0,143 3	0,144 9	0,146 3	0,147 5	0,148 7	0,149 6	0,150 5	0,151 3	0,152 0	0,152 6
8	0,124 3	0,126 5	0,128 4	0,130 1	0,131 7	0,133 1	0,134 4	0,135 6	0,136 6	0,137 6
9	0,106 6	0,109 3	0,111 8	0,114 0	0,116 0	0,117 9	0,119 6	0,121 1	0,122 5	0,123 7
10	0,089 9	0,093 1	0,096 1	0,098 8	0,101 3	0,103 6	0,105 6	0,107 5	0,109 2	0,110 8
11	0,073 9	0,077 7	0,081 2	0,084 4	0,087 3	0,090 0	0,092 4	0,094 7	0,096 7	0,098 6
12	0,058 5	0,062 9	0,066 9	0,070 6	0,073 9	0,077 0	0,079 8	0,082 4	0,084 8	0,087 0
13	0,043 5	0,048 5	0,053 0	0,057 2	0,061 0	0,064 5	0,067 7	0,070 6	0,073 3	0,075 9
14	0,028 9	0,034 4	0,039 5	0,044 1	0,048 4	0,052 3	0,055 9	0,059 2	0,062 2	0,065 1
15	0,014 4	0,020 6	0,026 2	0,031 4	0,036 1	0,040 4	0,044 4	0,048 1	0,051 5	0,054 6

Bảng 10 (kết thúc)

k	*n*									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
16	—	0,006 8	0,013 1	0,018 7	0,023 9	0,028 7	0,033 1	0,037 2	0,040 9	0,044 4
17	—	—	—	0,006 2	0,011 9	0,017 2	0,022 0	0,026 4	0,030 5	0,034 3
18	—	—	—	—	—	0,005 7	0,011 0	0,015 8	0,020 3	0,024 4
19	—	—	—	—	—	—	—	0,005 3	0,010 1	0,014 6
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,004 9
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0,394 0	0,391 7	0,389 4	0,387 2	0,385 0	0,383 0	0,380 8	0,378 9	0,377 0	0,375 1
2	0,271 9	0,270 1	0,268 4	0,266 7	0,265 1	0,263 5	0,262 0	0,260 4	0,258 9	0,257 4
3	0,235 7	0,234 5	0,233 4	0,232 3	0,231 3	0,230 2	0,229 1	0,228 1	0,227 1	0,226 0
4	0,209 1	0,208 5	0,207 8	0,207 2	0,206 5	0,205 8	0,205 2	0,204 5	0,203 8	0,203 2
5	0,187 6	0,187 4	0,187 1	0,186 8	0,186 8	0,186 2	0,186 9	0,185 5	0,185 1	0,184 7
6	0,169 3	0,169 4	0,169 5	0,169 5	0,169 5	0,169 5	0,169 5	0,169 3	0,169 2	0,169 1
7	0,153 1	0,153 5	0,153 9	0,154 2	0,154 5	0,154 8	0,155 0	0,155 1	0,155 3	0,155 4
8	0,138 4	0,139 2	0,139 8	0,140 5	0,141 0	0,141 5	0,142 0	0,142 3	0,142 7	0,143 0
9	0,124 9	0,125 9	0,126 9	0,127 8	0,128 6	0,129 3	0,130 0	0,130 6	0,131 2	0,131 7
10	0,112 3	0,113 6	0,114 9	0,116 0	0,117 0	0,118 0	0,118 9	0,119 7	0,120 5	0,121 2
11	0,100 4	0,102 0	0,103 5	0,104 9	0,106 2	0,107 3	0,108 5	0,109 5	0,110 5	0,111 3
12	0,089 1	0,090 9	0,092 7	0,094 3	0,095 9	0,097 2	0,098 6	0,099 8	0,101 0	0,102 0
13	0,078 2	0,080 4	0,082 4	0,084 2	0,086 0	0,087 6	0,089 2	0,090 6	0,091 9	0,093 2
14	0,067 7	0,070 1	0,072 4	0,074 5	0,076 5	0,078 3	0,080 1	0,081 7	0,083 2	0,084 6
15	0,057 5	0,060 2	0,062 8	0,065 1	0,067 3	0,069 4	0,071 3	0,073 1	0,074 8	0,076 4
16	0,047 6	0,050 6	0,053 4	0,056 0	0,058 4	0,060 7	0,062 8	0,064 8	0,066 7	0,068 5
17	0,037 9	0,041 1	0,044 2	0,047 1	0,049 7	0,052 2	0,054 6	0,056 8	0,058 8	0,060 8
18	0,028 3	0,031 8	0,035 2	0,038 3	0,041 2	0,043 9	0,046 5	0,048 9	0,051 1	0,053 2
19	0,018 8	0,022 7	0,026 3	0,029 6	0,032 8	0,035 7	0,038 5	0,041 1	0,043 6	0,045 9
20	0,009 4	0,013 6	0,017 5	0,021 1	0,024 5	0,027 7	0,030 7	0,033 5	0,036 1	0,038 6
21	—	0,004 5	0,008 7	0,012 6	0,016 3	0,019 7	0,022 9	0,025 9	0,028 8	0,031 4
22	—	—	—	0,004 2	0,008 1	0,011 8	0,015 3	0,018 5	0,021 5	0,024 4
23	—	—	—	—	—	0,003 9	0,007 6	0,011 1	0,014 3	0,017 4
24	—	—	—	—	—	—	—	0,003 7	0,007 1	0,010 4
25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,003 5
CHÚ THÍCH: Lấy từ tài liệu tham khảo [10].										

Bảng 11 – Kiểm nghiệm Shapiro–Wilk: p phân vị của thống kê kiểm nghiệm W đối với $p = \alpha$ = 0,01 và 0,05

n	p 0,01	p 0,05	n	p 0,01	p 0,05
			26	0,891	0,920
			27	0,894	0,923
			28	0,896	0,924
			29	0,898	0,926
			30	0,900	0,927
			31	0,902	0,929
			32	0,904	0,930
8	0,749	0,818	33	0,906	0,931
9	0,764	0,829	34	0,908	0,933
10	0,781	0,842	35	0,910	0,934
11	0,792	0,850	36	0,912	0,935
12	0,805	0,859	37	0,914	0,936
13	0,814	0,866	38	0,916	0,938
14	0,825	0,874	39	0,917	0,939
15	0,835	0,881	40	0,919	0,940
16	0,844	0,887	41	0,920	0,941
17	0,851	0,892	42	0,922	0,942
18	0,858	0,897	43	0,923	0,943
19	0,863	0,901	44	0,924	0,944
20	0,868	0,905	45	0,926	0,945
21	0,873	0,908	46	0,927	0,945
22	0,878	0,911	47	0,928	0,946
23	0,881	0,914	48	0,929	0,947
24	0,884	0,916	49	0,929	0,947
25	0,888	0,918	50	0,930	0,947

CHÚ THÍCH: Lấy từ tài liệu tham khảo [10].

Xem tài liệu tham khảo [11] đối với cỡ mẫu mở rộng $51 \leq n \leq 99$.

Bảng 12 – Kiểm nghiệm Epps-Pulley: p phân vị của thống kê kiểm nghiệm T_{EP} đối với $p = 1 - \alpha$ = 0,90; 0,95; 0,975 và 0,99

n	$1 - \alpha$ 0,90	0,95	0,975	0,99
8	0,271	0,347	0,426	0,526
9	0,275	0,350	0,428	0,537
10	0,279	0,357	0,437	0,545
15	0,284	0,366	0,447	0,560
20	0,287	0,368	0,450	0,564
30	0,288	0,371	0,459	0,569
50	0,290	0,374	0,461	0,574
100	0,291	0,376	0,464	0,583
200	0,290	0,379	0,467	0,590

CHÚ THÍCH: Lấy từ tài liệu tham khảo [5].

Bảng 13 – Kiểm nghiệm kết hợp sử dụng nhiều mẫu độc lập: Hệ số đề chuyển đổi W thành biến chuẩn chuẩn hóa đối với n = 8(1)50

n	$\gamma(n)$	$\delta(n)$	$\varepsilon(n)$
8	–2,696	1,333	0,4186
9	–2,968	1,400	0,3900
10	–3,262	1,471	0,3660
11	–3,485	1,515	0,3451
12	–3,731	1,571	0,3270
13	–3,936	1,613	0,3111
14	–4,155	1,655	0,2969
15	–4,373	1,695	0,2842
16	–4,567	1,724	0,2727
17	–4,713	1,739	0,2622
18	–4,885	1,770	0,2528
19	–5,018	1,786	0,2440
20	–5,153	1,802	0,2359
21	–5,291	1,818	0,2264
22	–5,413	1,835	0,2207
23	–5,508	1,848	0,2157
24	–5,605	1,862	0,2106
25	–5,704	1,876	0,2063
26	–5,803	1,890	0,2020
27	–5,905	1,905	0,1980
28	–5,988	1,919	0,1943
29	–6,074	1,934	0,1907
30	–6,150	1,949	0,1872
31	–6,248	1,965	0,1840
32	–6,324	1,976	0,1811
33	–6,402	1,988	0,1781
34	–6,480	2,000	0,1755
35	–6,559	2,012	0,1727
36	–6,640	2,024	0,1702
37	–6,721	2,037	0,1677
38	–6,803	2,049	0,1656
39	–6,887	2,062	0,1633
40	–6,961	2,075	0,1612
41	–7,035	2,088	0,1591
42	–7,111	2,101	0,1572
43	–7,188	2,114	0,1552
44	–7,266	2,128	0,1534
45	–7,345	2,141	0,1516
46	–7,414	2,155	0,1499
47	–7,484	2,169	0,1482
48	–7,555	2,183	0,1466
49	–7,615	2,198	0,1451
50	–7,677	2,212	0,1436

CHÚ THÍCH: Lấy từ tài liệu tham khảo [12].

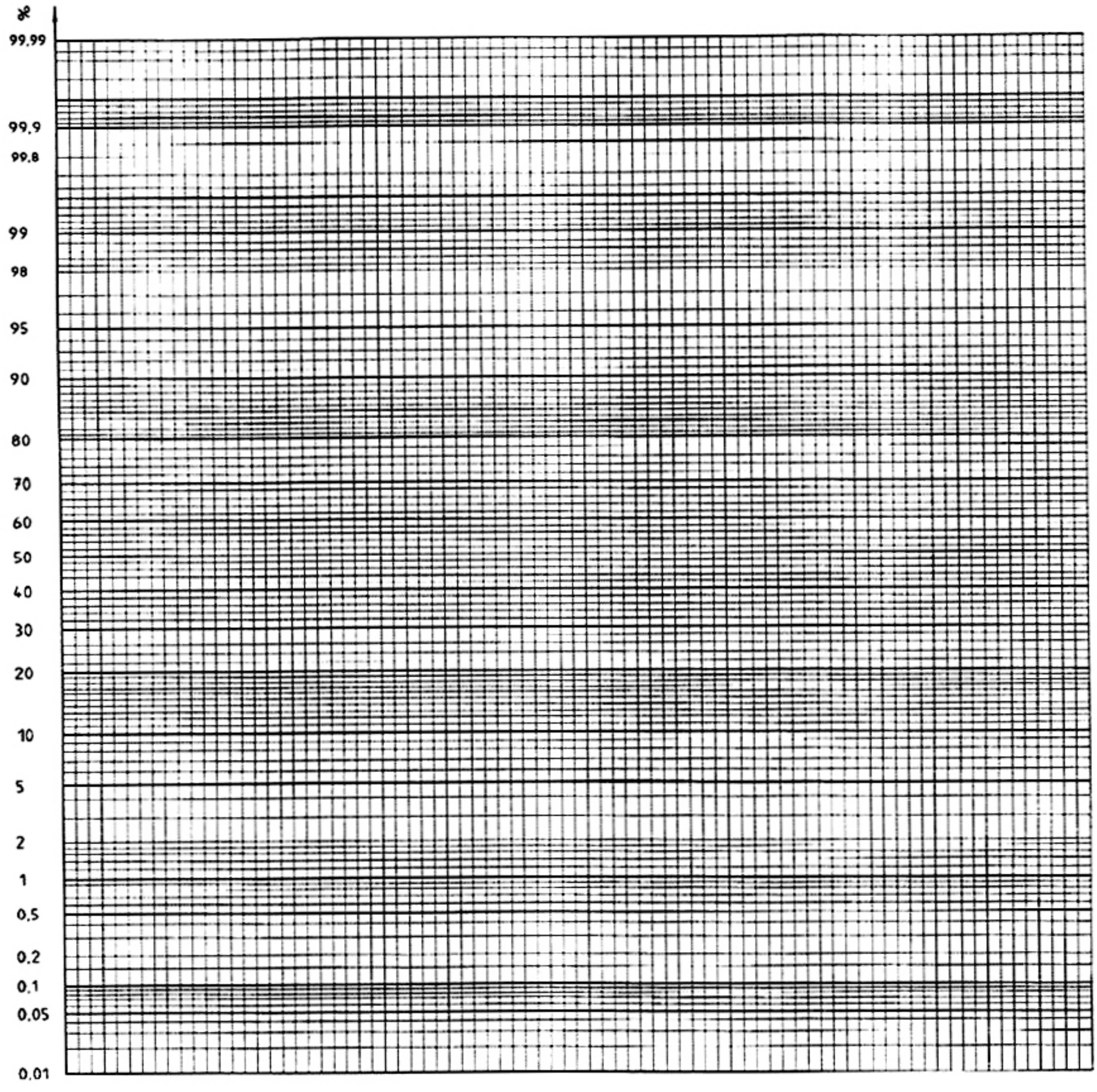
Bảng 14 – Đại lượng u_p của phân bố chuẩn chuẩn hóa

P %	α	u_p
90,0	0,10	1,282
95,0	0,05	1,645
97,5	0,025	1,960
99,0	0,01	2,326
99,5	0,005	2,576

Phụ lục A

(tham khảo)

Giấy đồ thị xác suất chuẩn để trống



Phụ lục B

(tham khảo)

Thư mục tài liệu tham khảo

[1] ISO 2854:1976, Statistical interpretation of data – Techniques of estimation and tests relating to means and variances (*Giải thích dữ liệu thống kê – Kỹ thuật ước lượng và kiểm nghiệm liên quan đến trung bình và phương sai*)

[2] BARINGHAUS, L., DANSCHKE, R., HENZE, N. Recent and classical tests for normality – A comparative study. Comm. Statistic. B, 18(I), 1989, pp. 363-379 (*Kiểm nghiệm tính chuẩn hiện đại và truyền thống – Nghiên cứu so sánh*).

[3] BARINGHAUS, L., HENZE, N. A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function. Metrika, 35, 1988, pp. 339-348 (*Kiểm nghiệm nhất quán về tính chuẩn đa biến dựa trên hàm đặc trưng thực nghiệm*)

[4] EPPS, T.W., PULLEY, L.B. A test for normality based on the empirical characteristic function. Biometrika, 70, 1983, pp. 723-726 (*Kiểm nghiệm tính chuẩn dựa trên hàm đặc trưng thực nghiệm*)

[5] HENZE, N. An approximation to the limit distribution of the Epps-Pulley test statistic for normality. Metrika, 37, 1990, pp. 7-18 (*Phép gần đúng với giới hạn phân bố của thống kê kiểm nghiệm Epps-Pulley về tính chuẩn*)

[6] D'AGOSTINO, R.B. Transformation to normality of the null distribution of g_1. Biometrika, 57, 1970, pp. 679-681 (*Chuyển đổi tính chuẩn của phân bố không của g_1*)

[7] PEARSON, E.S., HARTLEY, H.O. Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1, edn. 3, Cambridge University Press, 1966, pp. 207-208 (*Bảng sinh trắc học dùng cho nhà thống kê học*)

[8] D'AGOSTINO, R.B., TIETJEN, G.L. Simulation probability points of b_2 for small samples. Biometrika, 58, 1971, pp. 669-672 (*Mô phỏng điểm xác suất của b_2 đối với mẫu nhỏ*)

[9] BOWMANN, K.O., SHENTON, L.R. 'Omnibus' test contours for departures from normality based on $\left|\sqrt{b_1}\right|$, b_2. Biometrika, 62, 1975, pp. 243-250 (*Vòng kiểm nghiệm sai lệch so với tính chuẩn dựa trên $\left|\sqrt{b_1}\right|$, b_2*).

[10] SHAPIRO, S.S., WILK, M.B. An analysis of variance test for normality (complete samples). Biometrika, 52, 1965, pp. 591-611 [*Phân tích kiểm nghiệm phương sai đối với tính chuẩn (mẫu đầy đủ)*]

[11] SHAPIRO, S.S., FRANCIA, R.S. An approximate analysis of variance test for normality. J. Amer. Statist. Assoc., 337, 1972, pp. 215-216 (*Phân tích gần đúng kiểm nghiệm phương sai đối với tính chuẩn*)

[12] PEARSON, E.S., HARTLEY, H.O. Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 2, Cambridge University Press, 1976, p. 221 (*Bảng sinh trắc học dùng cho nhà thống kê học*)